

高分子科学中的平均场理论和 $1/N$ 展开*

李文武^{1†} 邱东^{1**} 张兴华^{2**}

(¹中国科学院化学研究所 高分子物理与化学国家重点实验室 北京 100190) (²北京交通大学物理系 北京 100044)

摘要 利用 $1/N$ 展开理论考察高分子物理中的几个典型高分子体系. 研究发现, 平均场理论只有在体系具备一定对称性时才适用. 在中性高分子溶液中, 不论是单组分、多组分还是嵌段共聚物体系, $1/N$ 展开理论对于 N 取值不小于 6 时是适用的. 对于聚电解质体系, 平均场理论仍然可以粗略地描述弱带电聚电解质的统计性质. 对于强带电聚电解质体系, 由于体系对称性大为降低, 平均场理论不再适用, 标度理论或许会是一个适合的方法.

关键词 平均场理论, $1/N$ 展开, 对称性, 高分子物理

多体问题一直是个引人入胜而又困难重重的领域. 一个最简单的多体问题是两体问题, 这是个可以严格求解的体系. 除此之外, 最简单的就是三体问题. 三体问题尽管看上去简单, 但实际上它却是很难严格求解的^[1,2], 困难在于体系中的个体彼此之间都存在相互作用, 而这些多体之间的相互作用又非常复杂, 绝大多数情况下不能用微扰论来计算. 因而一个简单的考虑即是: 在某个要求不太高的近似下, 用一个平均化的场来近似代替某个特定个体在多体体系中所受到的作用, 这样一来, 就把复杂的多体问题转化成了简单的单体问题, 这就是平均场理论的思想^[3].

平均场理论作为处理多体问题的一种重要的方法, 它的应用很早, 原子核物理中氦原子问题的 Hartree-Fock 近似, 超导电性的 BCS 理论都是平均场理论^[3]. 毋庸置疑, 平均场理论的预言与实验结果有一定差距, 但它给出的物理图像简单直观, 在定性上能给人一定的认识, 因而至今它仍然被广泛地应用在很多领域. 而对于高分子溶液体系来说, 更是如此. 目前的高分子溶液理论是建立在 Flory-Huggins 理论基础之上的, 它采用的随机混合近似完全忽略了体系在小尺度上的涨落和关联. 然而近年来随着实验、计算机模拟在多尺度相关现象的不断积累, 对理论上建立联系宏观或介观性质和微观结构的描述提出了挑战. Freed 首先发展了考虑了高分子局域结构特征的格子簇理

论(lattice cluster theory)^[4]. 这一新的理论考虑到了小尺度上链结构导致的局域上的关联, 从而可以在一定程度上克服 Flory-Huggins 理论中的最大的不足——随机混合近似. 同样注意到这一问题严重性的是 Semenov^[5]. 他指出尽管在分子熔体中由于这种局域关联的存在, 高分子的构象也不能被看作是无规行走. 自从物理学家 Edwards 将路径积分思想引入高分子科学中后, 高分子物理的研究得到了一个大的发展, 特别是平均场理论, 在认识高分子溶液的性质方面, 起了很大的推动作用. 在分子中性溶液中, 平均场理论用来探讨高分子链在被表面吸附后链的构象问题^[6~10]. 而在带电的聚电解质溶液中, 特别是弱带电的聚电解质体系, 人们也常用平均场理论这一常用的研究手段来获得一些关于聚电解质体系的性质, 这方面的研究工作有不均匀多组分聚电解质溶液的连续自洽场理论^[11], 柱状表面柔性聚电解质链的吸附与 depletion 转变的研究^[12], 带电柱状表面上聚电解质电荷反转现象的研究^[13], 等等. 尽管如此, 平均场理论的“平均”一词已被人们所认识, 但其后是否有深刻的物理隐藏在里面, 看上去不是特别明显. 近年来随着数值计算技术的发展, Morse 定量地给出了平均场理论忽视的关联和涨落效应^[14]; Stepanow 也指出了短程关联在场论理论中的关键^[15].

作为平均场理论的基础, $1/N$ 展开理论是与

* 2012-06-14 收稿, 2012-08-28 修稿.

** 通讯联系人, E-mail: dqi@iccas.ac.cn; zhangxh@iccas.ac.cn

† 李文武现通讯地址: 湖南第一师范学院教育科学系, 长沙 410205

doi:10.3724/SP.J.1105.2013.12177

对称性有关的. 而作为在现代物理学中越来越被人们所关注的一个重要的性质, 对称性, 在分析物理问题时起了至关重要的作用. 可以毫不夸张的说, 对称性在现代物理学中起着第一位重要的作用. 因而, 考察高分子物理中 $1/N$ 展开及其体系的对称性, 对于深化高分子物理的认识无疑是有帮助的.

1 平均场理论简要回顾

随着化学上的发展, 人们发现的高分子的种类日益增多, 这些高分子链不但在化学组成上千差万别, 而且在空间构型上也多种多样. 为了从理论上去描述它们, 我们首先得将高分子链模型化. 忽略链上微观组成的差异, 将重复单元看成一个整体, 这个整体看成是一个单体, 而整个链由这些单体组成. 单体之间存在相互作用, 沿着整个链来看, 第一个单体和第二个单体之间的相互作用与第二个单体和第三个单体之间的相互作用之间有关联, 但这种关联沿着链很快衰减, 因而我们可以简单的认为这些关联可以忽略, 从而将整个高分子链看成是一条柔软的链, 即高斯链. 由统计物理, 我们可以写出一条高分子链的构象分布^[3]. 当高分子的聚合度和所考察的尺度足够大时, 可将高分子链抽象为数学上连续的空间曲线, 这样就可以引入路径积分的方法来处理. 体系的配分函数为 $Z = \sum e^{-\beta U(\{r_i\})}$, 其中 $U(\{r_i\})$ 为构象 $\{r_i\}$ 时高分子链的势能. 在路径积分表示下, 体系总的配分函数可以写为一个复杂的泛函积分 $Z = \int D\{\phi\} D\{\omega\} D\{\eta\} e^{-F[\{\phi\}, \{\omega\}, \{\eta\}]}$, 其中 F 为体系自由能. 直接去计算配分函数是困难的, 一个常用的近似就是在鞍点展开来近似估计配分函数, $Z = \int D\{\phi\} D\{\omega\} D\{\eta\} e^{-F[\{\phi^*\}, \{\omega^*\}, \{\eta^*\}]}$, 其中 $\{\phi^*\}, \{\omega^*\}, \{\eta^*\}$ 为鞍点, 这就是平均场近似^[3, 6].

2 $1/N$ 展开理论

在量子场论中, 最重要的话题之一就是去求解该理论的散射矩阵元, 即通常所说的 S -矩阵. 在很多情况下, 严格求解 S -矩阵是非常困难的, 因此, 寻找某些近似方案, 比如微扰, 也就成了必然的事情. 通常来说, 只有存在一个展开参数时, 人们才有可能找到一个好的近似方法. 在物理学

中, 耦合常数 g 常常可以充当这个近似方法的展开参数. 不幸的是, 在量子场论中, 耦合常数已不能作为一个自由展开参数, 比如在描述强相互作用的量子色动力学 (QCD) 中就是如此. 事实上, 我们可以在重整化群理论中看到, 耦合常数 g 不能作为自由参数的原因在于它可以吸收到质量等物理量的重新定义中去. 既然 g 已经不能作为明显的展开参数, 为了能作展开, 那么人们必须找到隐藏的展开参数^[16].

荷兰物理学家 't Hooft 于 1974 年提出了 $1/N$ 展开理论^[17, 18], 它也被人们称为大 N 展开 (Large N Expansion), 这在量子场论和统计力学中是一种特殊的微扰方法. 我们知道, 描述强相互作用的量子色动力学具有一个内部对称性, 即所谓色对称性 (粒子物理中, 每味夸克具有 3 个新的自由度, 人们称之为色自由度, 整个理论在这个色对称操作下不变), 这是一个规范对称性, 其对称群为 $SU(3)$. 一般情况下, 量子场论的对称群为 $SU(N)$ 或 $SO(N)$, 其中 N 是一个固定参数, 比如, 对于电磁场, N 取值为 1, 对于杨-米尔斯 (Yang-Mills) 规范场, N 可以取 2. 在构造描述夸克形成不可分离的束缚态的强相互作用的场论的过程中, 't Hooft 特发现一个有趣的现象, 即当我们把体系的规范群 $SU(N)$ 的参数 N 不再当作一个固定值, 而是取为一个自由参数时, 我们可以将整个理论对 $1/N$ 作展开, 即此时可以把 $1/N$ 当作一个小参数来处理. 更惊人的是, 这种展开技巧即便是对于 $N=3$ 这样一个 N 不大的情形也适用. 另外, 这种展开技巧在粒子物理学、原子物理以及弦论中得到了大量应用^[19].

下面按照 Witten 的讲法^[16], 简要论述原子物理中的 $1/N$ 展开理论. 考虑 N 维空间中的氢原子, 它有明显的 $O(N)$ 旋转对称性, 其薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{e^2}{r} \psi = E\psi \quad (1)$$

对于 S -波, 波函数只是径向 r 的函数, 因而上述薛定谔方程变为:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{N}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi - \frac{e^2}{r} \psi = E\psi \quad (2)$$

实际上, 上式中 N 应为 $N-1$, 但由于 N 很大, N 和 $N-1$ 的差别可以忽略.

为了消除上述方程中的一次导数项, 作变换

$$H \rightarrow r^{\frac{1}{2}N} H r^{-\frac{1}{2}N} \quad (3)$$

这相当于波函数做变换 $\psi \rightarrow r^{-\frac{1}{2}N} \psi$, 体系哈密顿

量变为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{N^2}{9mr^2} - \frac{e^2}{r} \quad (4)$$

重新标度径向坐标为 $r = N^2 R$, 则哈密顿量为:

$$H = \frac{1}{N^2} \left(-\frac{\hbar^2}{2mN^2} \frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{9mR^2} - \frac{e^2}{R} \right) \quad (5)$$

可以看出, 上式中除了整体因子 N^2 外, 参数 N 只出现在动能项中, 它描述的是一个有效质量为 $M_{\text{eff}} = mN^2$ 的粒子在有效势 $V_{\text{eff}} = 1/(8mR^2) - e^2/R$ 中运动. 当 N 很大时, 动能受到抑制, 基态能近似为 V_{eff} 的极值的绝对值.

为了计算激发谱, 当 N 很大时, 可以将 V_{eff} 在其极值附近作二次展开. 上述氢原子体系基态束缚能(准确到 $1/N$ 的最低阶)为 $(2/N^2)me^4$. 当 $N = 3$ 时, 基态能为 $(2/9)me^4$, 但实际值为 $(1/2)me^4$, $1/N$ 展开与实际有偏差. 可以证明, 当 N 取很大的值时, $1/N$ 展开与实际是符合的, 这点对于氢原子体系也是如此.

3 高分子物理中的 $1/N$ 展开

从上述分析可知, N 的取值大小对于能否比较好的作展开具有很重要的意义. 由群论知识我们知道, N 越大, 即群越大, 体系对称性也越高, 作 $1/N$ 展开就越准确. 直观来看, 这也是很容易理解的, 比如, 分子在空间各个方向无规则运动时体系的对称性(对称群为 $O(3)$ 群)比朝某一方向运动的体系的对称性(平移对称群 P)高. 在量子色动力学中, $1/N$ 展开对于 $N = 3$ 时是非常成功的, 尽管 3 并不是一个很大的数值. 但在原子物理中, 当取 $N = 3$ 时, 对于氢原子而言, $1/N$ 展开得到的体系基态束缚能就与实际值有偏差. 对应到高分子物理中, N 该怎么取值, 这是一个值得探讨的问题, 因为 N 取值的大小直接关系到能否运用平均场理论.

3.1 中性高分子溶液

考虑一个单组分的中性高分子溶液^[20]. 我们定义高分子链上某个单体的有效配位数 C 为该单体近邻所占据的其他单体数. 对于高分子链来说, 由于链具有连接性, 除了链头和链尾, 中间任意一个单体的有效配位数都是 $C \geq 2$. 为了明确 C 是否为一个任意大的数, 我们不妨把链单体看成是小球, 至于小球的大小我们先撇开不管. 这样一来, 问题就转化为某小球近邻最多能排多少个其他的小球. 我们从固体物理学中知道^[21], 晶格原

子球排列的方式有简单立方晶格(其近邻原子数为 6)、体心立方晶格(其近邻原子数为 8)、六角密排晶格(其近邻原子数为 12)、面心立方晶格(其近邻原子数为 12)和金刚石晶格(其近邻原子数为 4)等几种, 其中近邻数最大的为 12, 最小的为 4. 对应到高分子浓溶液或熔体中, 由于高分子链的充分穿插, 单体排列非常紧密, 其排列方式至少要比简单立方晶格复杂, 即其有效配位数 $C \geq 6$, 而 $1/C$ 是一个较小的数, 取 $N = C$, 场具有 $O(C)$ 对称性, 因而 $1/N$ 展开是合理的.

相反, 如果高分子溶液不是一个浓溶液或熔体, 而是稀溶液或亚浓溶液, 那么平均场理论在 N 怎么取值还可以适用. 我们知道, 对于一个物理体系, 当其中涨落特别大时, 平均场理论是不适用的, 判断适用与否的标准即所谓的金兹堡判据. 对应到高分子物理学中, 一个极稀的、或者稀的溶液, 平均场理论是不适用的, 因为涨落太大, 不满足金兹堡判据(Ginzburg criterion). 对于一个三维空间中的浓溶液, 整个体系具有 $O(3)$ 对称性. 对于稀溶液来说, 就没有 $O(3)$ 对称性. 这是因为高分子链上的某个指定单体的近邻具有的配位数太少. 任取链上中间部分的一个单体(称为指定单体), 顺着高分子链看, 指定单体的前后各一个单体, 其近邻单体总数是 2. 高分子链蜷缩起来, 其近邻数大于 2. 尽管如此, 但并不是链上每个单体都是如此. 从整体上, 体系没有任何对称性, 于是平均场不再适用. 当高分子浓度增加时, 链上指定单体的近邻的单体数也越来越多, 而且链上这样的指定单体数也越来越多. 浓度继续增加, 按照简单的立方晶格模型, 当任意指定单体的近邻单体数为 6 时, 场就呈现对称性, 其对称群为 $O(6)$, 而整个体系呈现出 $O(3)$ 对称性, 此时平均场就适用了. 而且对称性越高, 平均场理论就用得越好, 其计算结果的精度就越高.

3.2 多组分溶液和嵌段共聚物

由于不同种类的高分子组成的均相混合物稀少^[22], 我们不考虑它. 考虑一个含有高分子 A 和 B 的两组分溶液, 其小分子记为 m , 它们之间的相互作用分别记为 ε_{AA} , ε_{AB} , ε_{BB} , ε_{Am} , ε_{Bm} 和 ε_{mm} . 如果 ε_{AA} (或 ε_{BB}) 与 ε_{AB} 差别很小, 整个体系为一个很好的比较稳定的混合溶液, 在适当的浓度下, 任意一个单体的有效配位数 $C (6 \leq C \leq 12)$ 为一个较大的数, 此时 $1/N$ 展开仍然适用, 即平均场理论是个比较好的近似. 如果 ε_{AA} (或 ε_{BB}) 与 ε_{AB} 差

别较大,对于初始的混合溶液,配位数不太小,仍然可以近似的使用平均场理论,但体系会形成宏观相分离,分为两相 A 和 B . 尽管体系的整体对称性可能不如混合时的高,但对于纯粹的 A 或 B 来说,对称性显得比分相前要高,此时平均场理论对 A 或 B 更加适用. 显然,这样的分析可以推广到多组分体系. 对于嵌段共聚物,比如两嵌段共聚物体系,分析类似于两组份溶液的情形. 只不同的此时是微观相分离,而不是宏观相分离,相分离前后体系的对称性变化与两组分的基本相同,因而平均场理论仍然可以用来作定性的描述.

3.3 聚电解质溶液

对于聚电解质溶液^[23, 24],首先考虑弱带电的聚电解质. 关于带电的强弱,文献上有多种理解,它与很多因素有关,比如带电溶质的浓度、溶液的 pH 值等诸多因素. 然而,我们可以这样理解“强”与“弱”. 所谓“弱”其实质就是由于带电引起的静电势能小(相对体系总能量 $H = H_0 + \Delta H$ 组成中的其他能量来说),其静电势能表达式不妨写为 $U = fe^2/r$,其中 f 是与体系组分、溶液离解能力和聚电解质单体的化合价等因素有关的量. 为简单起见,考虑一个简单模型,即单组分聚电解质溶液. 我们知道,聚电解质链上由于带同种电荷,根据库仑定律,链上单体之间会互相排斥,排斥的后果就是高分子链也不再是柔性链,相反,此时它具有一定的刚性. 一个合理的极限情形,即如果链上带电比较少,高分子链刚性也比较小,此时偏离柔性链不太远,对于一个适当浓度的聚电解质溶液来说,体系还是具有一定对称性,这类似于中性高分子溶液,尽管对称性没有中性情况的对称性高,但偏离不远,此时我们可以粗略地将它作为微扰来处理,即将平均场作为一个比较粗糙的手段来获取对聚电解质体系的定性认识. 事实上,尽管静电势能特别小时,也不容易处理,主要是库仑作用是长程互相作用,聚电解质链本身的局部结构(刚性)和反离子凝聚互相影响,盐离子对体系有屏蔽效应等等.

对于强带电的聚电解质溶液,情况就复杂多了. 首先是静电势能不再是一个小量,决不能再将它视为微扰来处理,此时完全就是一个相互作用很强的多体系统,本质上类似于固体理论中电子的强关联,可以说,这就是一个强关联问题. 时至今日,强关联仍然是一个未解决的难题. 对于带电很强的高分子溶液,由于链上带电多,使得链

的刚性很大. 在同等条件下,刚性链的构象远比柔性链的少,占用有效体积也比柔性链的大. 可以看出,处在溶液中的这样弯弯曲曲的刚棒,其上的单体的近邻处的单体数(即配位数)远比柔性链的要少,换句话说,即体系的对称性大为下降,从之前的 $O(C)$,其中 $6 \leq C \leq 12$,到现在的平移对称性(刚棒)或者无对称性,平均场理论严重不适用. 我们再来考虑一个极限情况,即聚电解质链上带电很强,以至于链成了完全拉直的链(事实上,聚电解质链不可能完全拉直). 此时,我们发现,链上的单体沿着链有平移对称性(用群论的语言来讲,平移对称群是共形对称群的子群),其对称群用 P 表示. 很显然,对于一根直的链,我们完全可以任意重新标度,此时标度理论也许是个比较好的选择. 除了极限情况外,高分子链是个弯曲的刚棒,类似于多边折线,在要求不太高的情况下,也是可以标度的,即也可以用标度理论去粗略的描述.

由上可见,体系的对称性对于问题的分析具有重要的意义. 这个重要意义不但反映在粒子物理学、原子物理学等领域,而且在复杂体系如高分子溶液也有相当的反映,同时,对称性的分析也能初步应用到聚电解质溶液. 对于聚电解质体系,平均场理论和标度理论作为近似手段能粗略描述它,但要彻底解决这个问题,也许需要更复杂的手段和方法,这有待将来去研究.

4 结论

本文通过对单组分中性高分子溶液的平均场理论和 $1/N$ 展开理论对比研究,发现高分子溶液只有显示出对称性时,才能很好的使用平均场理论,即在浓溶液和熔体情况下,平均场理论适用;而当体系不具备对称性时,体系涨落很大,平均场理论不太适用. 同时我们发现,在高分子溶液中, $1/N$ 展开理论对于 N 取值为 $N \geq 6$ 时是适用的. 同时,对于聚电解质体系,平均场理论仍然可以粗糙的描述弱带电的聚电解质,而对于强带电聚电解质体系,体系对称性大为降低,平均场理论不再适用,尽管对称性有所降低,但残留的对称性使得标度理论也许是一种描述强带电聚电解质的合适的手段.

致谢 感谢与北京师范大学物理系严大东、中国科学院化学研究所高分子物理与化学实验室彭莉、梅道宏和杨科大的讨论.

REFERENCES

- 1 Diacu F. Math Intell, 1996, 18: 66 ~ 70
- 2 Saari D. Am Math Mon, 1990, 89: 105 ~ 119
- 3 Li Wenwu(李文武). Self-Consistent Field Theory Studies on The Interface Behaviors in Adsorptive Polymer Solutions(吸附性高分子溶液界面行为的平均场研究). Doctoral Dissertation of Graduate University of Chinese Academy of Sciences(中国科学院研究生院博士论文), 2011
- 4 Freed K F, and Dudowicz J, Adv Polym Sci, 2005, 183: 63 ~ 126
- 5 Wittmer J P, Beckrich P, Johnner J, Semenov N, Obukhov S P, Meyer H, Baschnagel J. Euro phys Lett, 2007, 77: 56003 ~ 56006
- 6 Suo Tongchuan(所同川). Theoretical Studies on the Inhomogeneous Structures in Polymeric Systems(高分子体系中若干非均相结构的理论研究). Doctoral Dissertation of Graduate University of Chinese Academy of Sciences(中国科学院研究生院博士论文), 2010
- 7 Yang S, Yan D D, Shi A. Macromolecules, 2006, 39: 4168 ~ 4174
- 8 Kim J U, Matsen M W. Macromolecules, 2008, 41: 4435 ~ 4443
- 9 Yang S, Yan D D, Tan H G, Shi A C. Phys Rev E, 2006, 74: 041808 ~ 041817
- 10 Li W W, Man X K, Qiu D, Zhang X H, Yan D D. Polymer, 2012, 53: 3409 ~ 3415
- 11 Shi A C, Noolandi J. Macromol Theor Simul, 1999, 8: 214 ~ 229
- 12 Man X K, Yang S, Yan D D, Shi A C. Macromolecules, 2008, 41(14): 5451 ~ 5456
- 13 Man X K, Yan D D. Macromolecules, 2010, 43(5): 2582 ~ 2588
- 14 Qin J, Morse D C. Phys Rev Lett, 2012, 108: 238301
- 15 Kudlay A, Stepanow S. J Chem Phys, 2003, 118: 4272 ~ 4277
- 16 Witten E. The $1/N$ expansion in atomic and particle physics. In: 't Hooft G ed. Recent Developments in Gauge Theories. New York: Plenum Press, 1980. 403
- 17 't Hooft G. Nucl Phys B, 1974, 72: 461 ~ 473
- 18 't Hooft G, Large N. In: Lebed R F, ed. Phenomenology of Large N_c QCD. Singapore: World Scientific, 2002. 3 ~ 18
- 19 Witten E. Nucl Phys B, 1979, 160: 57 ~ 115
- 20 Man Xingkun(满兴坤). The Behavior of Polyelectrolytes near Oppositely Charged Surfaces within Self-Consistent Field Theory(聚电解质在带电界面附近吸附行为的自洽场理论研究). Doctoral Dissertation of Graduate University of Chinese Academy of Sciences(中国科学院研究生院博士论文), 2009
- 21 Huang Kun(黄昆原著), Han Ruqi(韩汝琦改编). Solid Physics(固体物理学). Beijing(北京): Senior Education Press(高等教育出版社), 1988. 2 ~ 6
- 22 DOI M. Introduction to Polymer Physics. Oxford: Clarendon Press, 1996. 38 ~ 41
- 23 Boroudjerdi B, Kim Y W, Naji A, Netz R R, Schlagberger X, Serr A. Phys Rep, 2005, 416: 129 ~ 199
- 24 Netz R R, Andelman D. Phys Rep, 2003, 380: 1 ~ 95

MEAN FIELD THEORY AND THE $1/N$ EXPANSION IN
POLYMER PHYSICS

Wen-wu Li¹, Dong Qiu¹, Xing-hua Zhang²

(¹ State Key Laboratory of Polymer Physics and Chemistry, Institute of Chemistry, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

(² School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044)

Abstract The $1/N$ expansion, as a rigorous basis of the Mean Field Theory (MFT), is discussed in several typical polymer systems. It shows that MFT can be applied well in polymer physics only if the system has certain symmetries. In neutral polymer solutions, MFT is suitable for concentrated solutions and melts, in which N is no less than six, but not suitable for dilute and very dilute solutions whose N is less than six. Moreover, MFT is a good description in polyelectrolyte solutions if the polymer chains are very weakly-charged. However, for the case of strongly-charged systems, MFT is no longer the right way due to the low symmetries of the system, then maybe the scaling theory will be a good choice.

Keywords Mean field theory, $1/N$ Expansion, Symmetry, Polymer physics